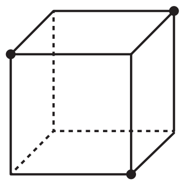
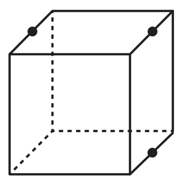
第18回 立体の切断

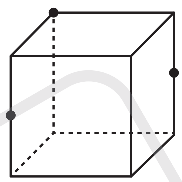
ねらい
- 立体を1つの平面で切断したときの，切り口の図形について調べる。また，切り分けられた立体の体積を求める。
- 立方体を積み重ねて作った立体を切断したり穴(あな)を開けたりする問題を解く。

例題 1 立方体の切り口の図形(1)

次のそれぞれの図は立方体で，辺上の点はそれぞれの辺の真ん中の点です。この立方体を各図の・で示した3点を通る平面で切るとき，切り口はどのような図形になりますか。

(1)


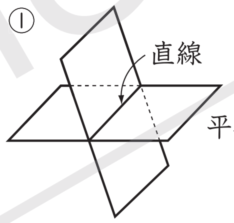
(2)


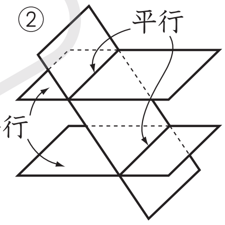
(3)


解き方とポイント

立体を1つの平面で切ったときの切り口の図形について，次のような性質があります。

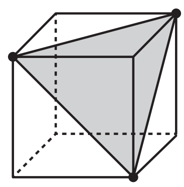
① 平面と平面が交わる線は直線になり，立体の表面を通ります。よって，切り口の図形の辺は，もとの立体の面の上にあります。立方体や直方体を切るとき，面の数は6つなので，切り口の形はN角形（Nは6以下）になります。





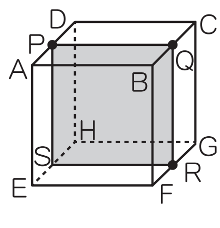
② 平行な2つの平面と，他の1つの平面が交わるとき，それぞれが交わる直線は平行になります。立方体や直方体は向かい合った面が平行なので，切ったとき，向かい合った面にできる切り口の図形の辺は平行になります。

(1) 各点を結んだ直線は立方体の面の上にあるので，すべて切り口の図形の辺になります。それぞれの長さも等しいので，切り口の図形は正三角形です。



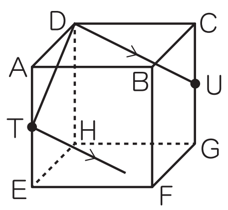
答　正三角形

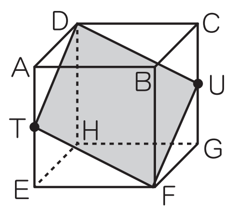
(2) 右の図で，PQ，QRは立方体の面の上にあるので，切り口の図形の辺になりますが，PRは立方体の面の上にないので，切り口の図形の辺にはなりません。面ABCDと面EFGHは平行なので，PQと平行な直線を点Rを通るように引き，その直線とEHとの交点をSとします。PSとSRは立方体の面の上にあるので，切り口の図形の辺になります。切り口の図形は四角形PSRQで，これは立方体の面と合同なので正方形です。



答　正方形

(3) 右の図で，DT，DUは立方体の面の上にあるので，切り口の図形の辺になります。面CDHGと面BAEFは平行なので，点Tを通りDUと平行な直線を引くと，この直線は点Fを通ります。点Uと点Fを結ぶと，TFとFUは立方体の面の上にあるので，切り口の図形は四角形DTFUになり，すべての辺の長さが等しいのでひし形です。





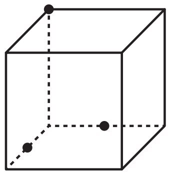
答　ひし形

基本問題　1，2

類題1

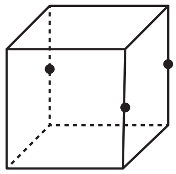
　次のそれぞれの図は立方体で，辺上の点はそれぞれの辺の真ん中の点です。この立方体を各図の•で示した3点を通る平面で切るとき，切り口はどのような図形になりますか。

□(1)



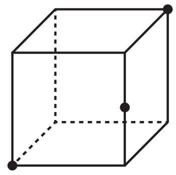
(　　　　　　　　)

□(2)



(　　　　　　　　)

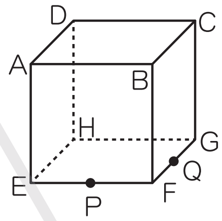
□(3)



(　　　　　　　　)

例題 2　立方体の切り口の図形(2)

　右の図の立方体ABCD－EFGHで，点P，Qはそれぞれの辺EF，FGの真ん中の点です。この立方体を点D，P，Qを通る平面で切るとき，切り口の形を答えなさい。



解き方とポイント

　PQは立方体の面の上にあるので，切り口の図形の辺になりますが，DP，DQは立方体の面の上にないので，切り口の図形の辺にはなりません。面ABCDと面EFGHは平行なので，PQと平行な直線を，点Dを通るように引いても，この直線は立方体の面の上にありません。

　そこで，右の図1のように，面AEHDを広げて考えて，QPとHEをそれぞれ延長した直線の交点をRとします。このとき，図2のように，点Rは面AEHDを広げた面にあるので，DとRを結んだ直線とAEとの交点をTとすると，DTは面AEHD上にあり，切り口の図形の辺となります。

図1

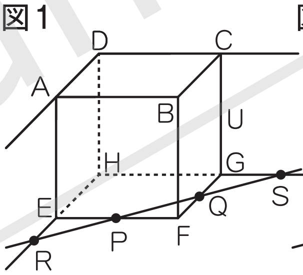


図2

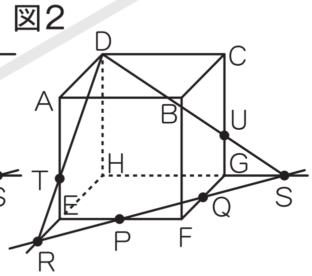
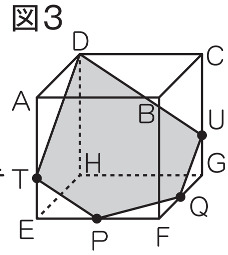


図3

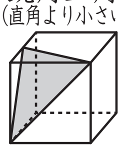


　同様にして，PQとHGをそれぞれ延長した直線の交点をSとし，DとSを結んだ直線とCGとの交点をUとすると，DUも切り口の図形の辺となります。

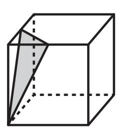
　図3のように，TとP，UとQを結ぶと，切り口の図形は五角形とわかります。　　答　五角形

※　立方体を切断してできる切断面（切り口の図形）は，以下の12種類があります。

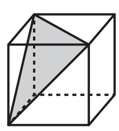
① 鋭角三角形（直角より小さい角）



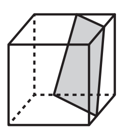
② 二等辺三角形



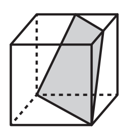
③ 正三角形



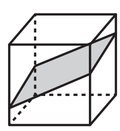
④ 台形



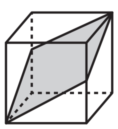
⑤ 等脚台形



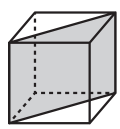
⑥ 平行四辺形



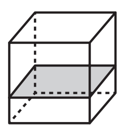
⑦ ひし形



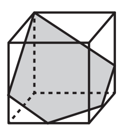
⑧ 長方形



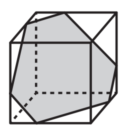
⑨ 正方形



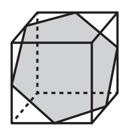
⑩ 五角形



⑪ 六角形



⑫ 正六角形



ポイント

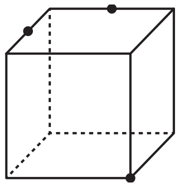
立体の切り口の図形のかきかた
- 切断したときに通る点のうち，同じ面上にある点を直線で結ぶ。
- 切り口の辺に平行で，切断したときに通る点を通る直線を，平行な面に引く。
- 切り口の図形の辺と立体の面を延長して，結ぶことのできる頂点を結ぶ。

基本問題　2

類題2

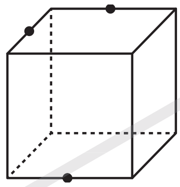
次のそれぞれの図は立方体で，辺上の点はそれぞれの辺の真ん中の点です。この立方体を各図の • で示した3点を通る平面で切るとき，切り口はどのような図形になりますか。

□(1)



(　　　　　　)

□(2)



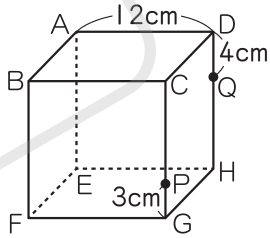
(　　　　　　)

例題 3 立方体を切断した立体の体積(1)

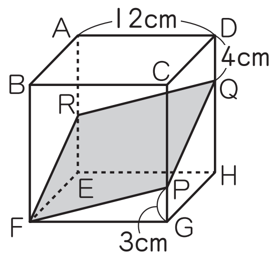
右の図のように，立方体ABCD－EFGHを，3点P，Q，Fを通る平面で切って2つの立体に分けました。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　切り口の図形と辺AEとの交点は，頂点Aから何cmのところにありますか。

(2)　切り分けた2つの立体のうち，頂点Eをふくむ立体の体積は何cm³ですか。



解き方とポイント



(1)　切り口は右の図のようになります。切り口の図形とAEとの交点をRとすると，QRとPFは平行なので，HQとERの長さの差は，GPの長さと等しくなり，ER＋GP＝HQになります。

ER＋3＝12－4＝8　　　ER＝5(cm)

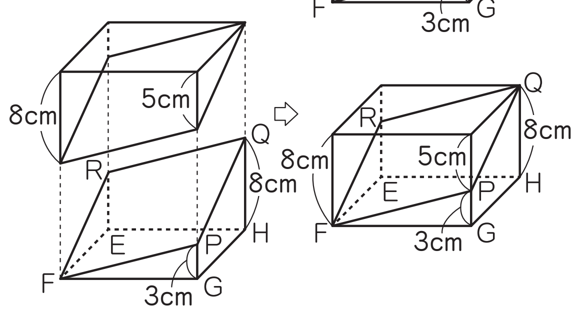
よって，頂点Aからの距離は，

12－5＝7(cm)　　　　答　7cm

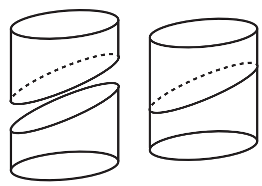
(2)　直方体を，切り口が平行四辺形となるように切った立体は，同じ立体を重ねると直方体になります。よって，

12×12×8÷2＝576(cm³)

答　576cm³



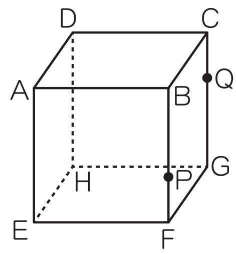
※　同様に，円柱を底面を通らないようにななめに切った立体も，同じ立体を重ねると円柱になるので，重ねてできた円柱の体積の半分として体積を求めることができます。



基本問題　3～6

□**類題3**

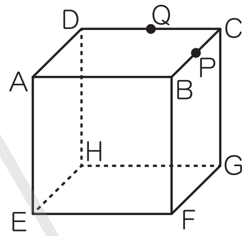
右の図は，1辺が6cmの立方体ABCD－EFGHです。点Pは辺BF上の点，点Qは辺CG上の点で，PF＝CQ＝2cmです。この立方体を，3点E，P，Qを通る平面で2つに切り分けました。このとき，頂点Gをふくむ立体の体積は何cm^3ですか。



（　　　　　cm^3）

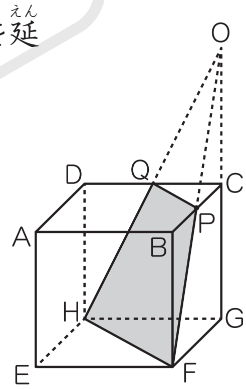
例題 4　立方体を切断した立体の体積(2)

右の図は，1辺が12cmの立方体ABCD－EFGHです。点P，点Qはそれぞれ辺BC，CDの真ん中の点です。この立方体を，3点P，Q，Fを通る平面で2つに切り分けました。このとき，頂点Cをふくむ立体の体積は何cm^3ですか。



解き方とポイント

切り口は右の図のような等脚台形PQHFになります。ここで，辺GC，FP，HQを延長した線の交点をOとして，三角すいO－FGHを考えます。



$CP = CQ = 12 \div 2 = 6\,(cm)$

$OC : OG = CP : GF = 6 : 12 = 1 : 2$

$OC = 12 \div (2-1) \times 1 = 12\,(cm)$

$OG = 12 \div 1 \times 2 = 24\,(cm)$

よって，求める体積は，

$12 \times 12 \div 2 \times 24 \times \frac{1}{3} - 6 \times 6 \div 2 \times 12 \times \frac{1}{3} = 504\,(cm^3)$　　答　$504cm^3$

◎別の解き方◎

三角すいO－PCQと三角すいO－FGHは相似で，その相似比は（CP：GF＝6：12＝）1：2なので，体積の比は，

$(1 \times 1 \times 1) : (2 \times 2 \times 2) = 1 : 8$

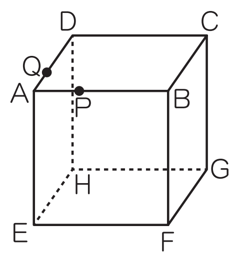
となります。よって，求める体積は，

$6 \times 6 \div 2 \times 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{8-1}{1} = 504\,(cm^3)$

基本問題　7，8

□**類題4**

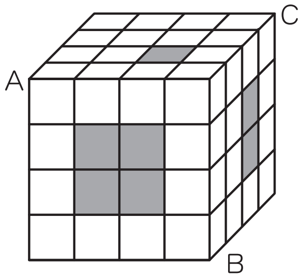
右の図は，1辺が6cmの立方体ABCD－EFGHです。点P，点Qはそれぞれ辺AB，AD上の点で，AP＝AQ＝2cmです。この立方体を，3点P，Q，Fを通る平面で2つに切り分けました。このとき，頂点Aをふくむ立体の体積は何cm^3ですか。



（　　　　　cm^3）

例題 5　立方体を積み重ねた立体の切断と穴(あな)開け

右の図のように，小さい立方体を64個はりあわせて大きな立方体を作りました。切断したり，穴を開けたりしても，立体がくずれることはないものとして，次の問いに答えなさい。

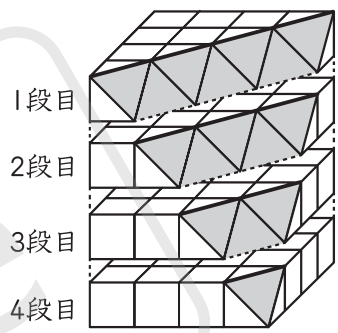


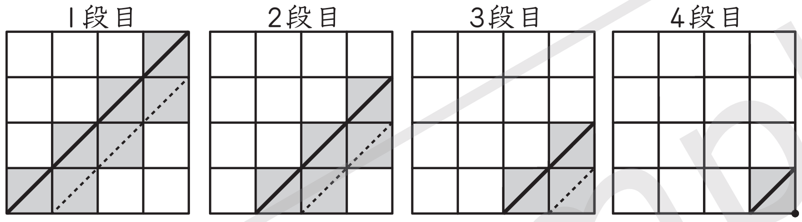
(1)　この立方体を3点A，B，Cを通る平面で切断したとき，切断された小さい立方体は何個ですか。

(2)　図の影(かげ)をつけた部分を反対側の面までくりぬいて穴を開けたとき，穴を開けたあとの立体は，小さい立方体何個分になっていますか。

解き方とポイント

(1)　切断面は，正三角形ABCになります。右の図のように，各段(だん)ごとに分け，各段の上から見た図を考えて，切断される小さい立方体の個数を調べます。各段の上の面の切り口を太線(――)で，下の面の切り口を点線(……)で表すと，下の図のようになります。

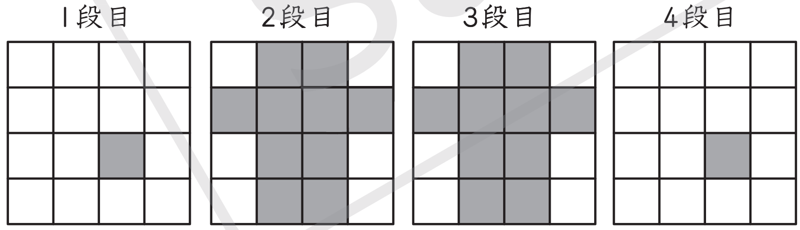


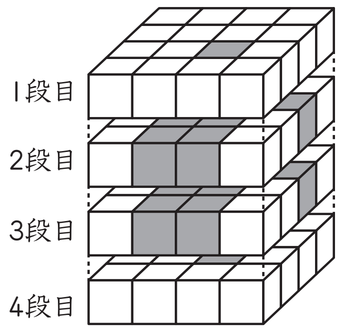


太線や点線が通る立方体が，切断される小さい立方体なので，

$7+5+3+1=16$(個)　　答　16個

(2)　右の図のように，各段ごとに分けて，各段の上から見た図を考えます。





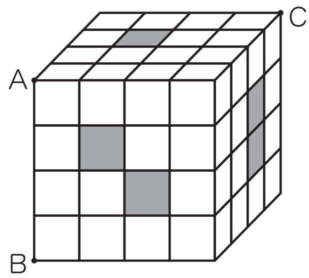
各段の残った立方体の個数は，

$15+6+6+15=42$(個)　　答　42個

→ 基本問題　9，10

類題5

右の図のように，小さい立方体を64個はりあわせて大きな立方体を作りました。切断したり，穴を開けたりしても，立体がくずれることはないとして，次の問いに答えなさい。



□(1)　この立方体を3点A，B，Cを通る平面で切断したとき，切断された小さい立方体は何個ですか。

(　　　　　個)

□(2)　図の影をつけた部分を反対側の面までくりぬいて穴を開けたとき，穴を開けたあとの立体は，小さい立方体何個分になっていますか。

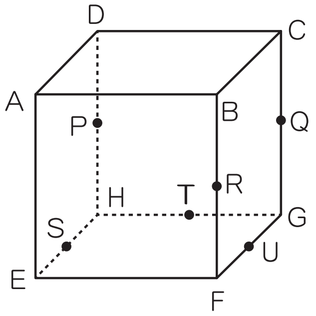
(　　　　　個)

基　本　問　題

1　次の立方体で，点P，Q，R，S，T，Uはそれぞれ辺DH，CG，BF，EH，HG，FGの真ん中の点です。この立方体を，次の3点を通る平面で切るとき，切り口はどのような図形になりますか。

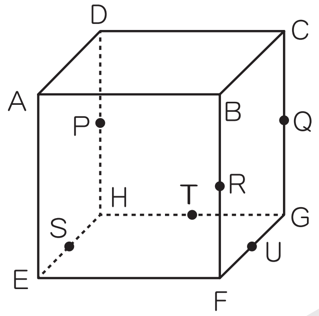
➔例題 **1**

□(1)　3点D，E，Tを通る平面で切るとき。



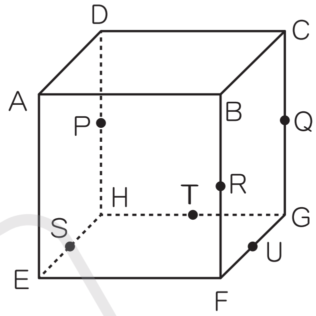
(　　　　　　　　)

□(2)　3点C，D，Uを通る平面で切るとき。



(　　　　　　　　)

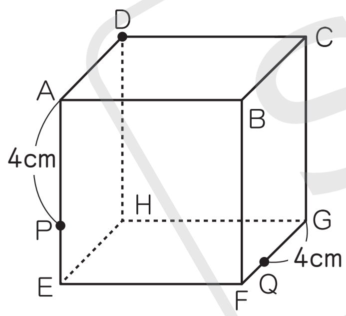
□(3)　3点A，C，Uを通る平面で切るとき。



(　　　　　　　　)

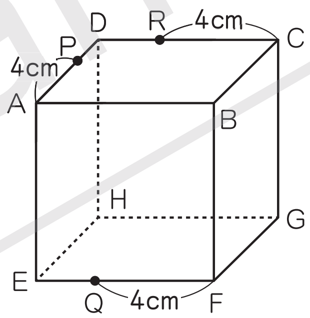
2　次の図は，1辺の長さが6cmの立方体です。この立方体を，次の3点を通る平面で切るとき，切り口はどのような図形になりますか。　➔例題 **1，2**

□(1)　3点D，P，Qを通る平面で切るとき。



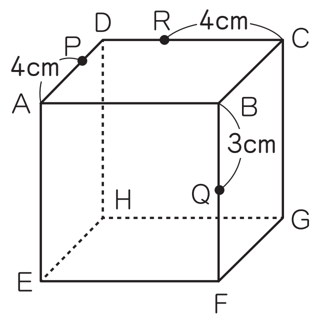
(　　　　　　　　)

□(2)　3点P，Q，Rを通る平面で切るとき。



(　　　　　　　　)

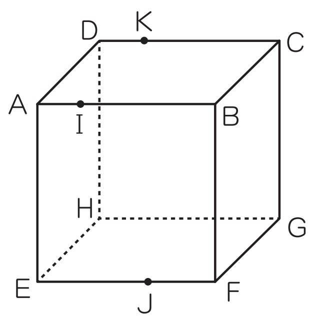
□(3)　3点P，Q，Rを通る平面で切るとき。



(　　　　　　　　)

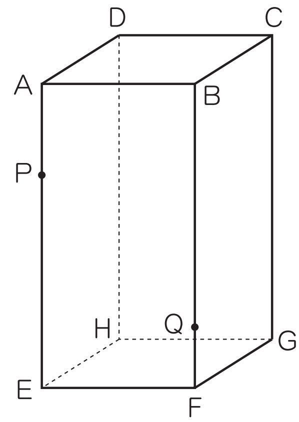
□**3**　1辺の長さが8cmの立方体ABCD－EFGHがあります。図のように，辺AB上でAI＝2cmとなる点をIとし，辺EF上でFJ＝3cmとなる点をJとします。また，ADとIKが平行になるような辺CD上の点をKとします。この立方体を3点I，J，Kを通る平面で切ったときにできる2つの立体のうち，大きい方の立体の体積は何cm³ですか。

➔例題 **3**



(　　　　　　cm³)

4 右の図は，縦5cm，横5cm，高さ10cmの直方体で，AP＝3cm，BQ＝8cmです。この直方体を3点D，P，Qを通る平面で2つに切り分けました。これについて，次の問いに答えなさい。 ➔例題 **3**



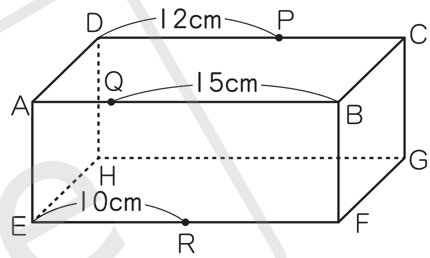
□(1) 切り口は，辺CG上のCから何cmのところにありますか。

（　　　　　cm）

□(2) 頂点Aをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

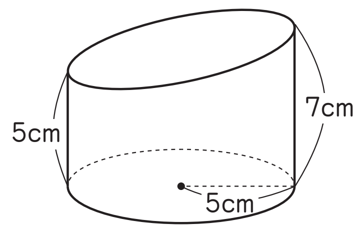
（　　　　　cm³）

□**5** AD＝12cm，CD＝20cm，CG＝8cmの直方体ABCD－EFGHがあります。右の図のように，3点P，Q，Rを通る平面でこの直方体を2つの部分に分け，頂点Aをふくむ部分を「立体㋐」，頂点Bをふくむ部分を「立体㋑」とします。「立体㋐」と「立体㋑」の体積の比を求めなさい。 ➔例題 **3**



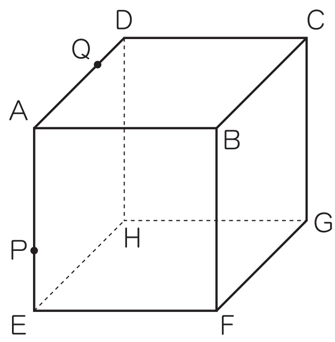
（　　：　　）

□**6** 底面の半径が5cmの円柱を平面で切って，右の図のような立体を作りました。この立体の体積は何cm³ですか。ただし，円周率は3.14とします。 ➔例題 **3**



（　　　　　cm³）

7 右の図は，1辺が6cmの立方体です。点P，点Qはそれぞれ辺AE，AD上の点で，AP＝AQ＝4cmです。この立方体を，3点P，Q，Cを通る平面で2つに切り分けました。これについて，次の問いに答えなさい。 ➔例題 **4**



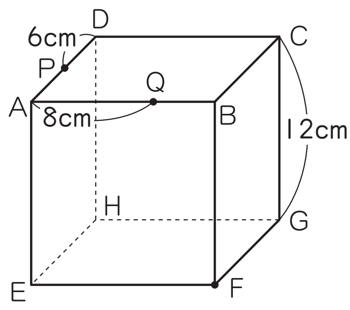
□(1) 切り口はどのような図形になりますか。

（　　　　　）

□(2) 頂点Aをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

（　　　　　cm³）

8 右の図は，１辺の長さが12cmの立方体で，点P，Qはそれぞれ辺AD，AB上の点です。この立方体を3点F，P，Qを通る平面で2つに切り分けました。これについて，次の問いに答えなさい。 ➔例題 4



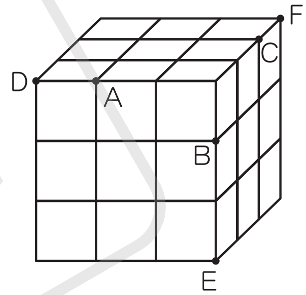
□(1) 切り口は辺EHを通ります。切り口の線とEHとの交点をRとするとき，ER：RHを求めなさい。

（　　　：　　　）

□(2) 頂点Aをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

（　　　　　cm³）

9 右の図は，小さい立方体の積み木を27個積み重ねてできた大きい立方体です。この大きい立方体を，3点を通る平面で2つに切り分けます，これについて，次の問いに答えなさい。 ➔例題 5



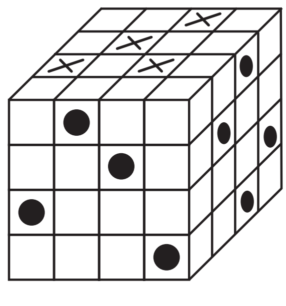
□(1) 3点A，B，Cを通る平面で切断したとき，切られる小さい立方体の個数は何個ですか。

（　　　　　個）

□(2) 3点D，E，Fを通る平面で切断したとき，切られる小さい立方体の個数は何個ですか。

（　　　　　個）

10 右の図のように，64個の小さい立方体を積み重ねて大きい立方体を作り，その大きい立方体に，反対の面までくりぬいて穴を開けます。これについて，次の問いに答えなさい。 ➔例題 5



□(1) 右の図の黒丸の位置から穴を開けたとき，１つも穴が開いていない小さい立方体の数は何個ですか。

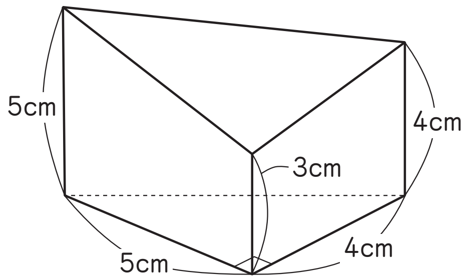
（　　　　　個）

□(2) (1)の状態からさらに，×の位置からも穴を開けたとき，１つも穴が開いていない小さい立方体の数は何個ですか。

（　　　　　個）

練　習　問　題

□**1** 底面が直角三角形の三角柱を平面で切って，右の図のような立体を作りました。この立体の体積は何cm³ですか。



cm³

2 図1は，1辺が12cmの立方体で，点P，Qはそれぞれ辺AB，ADの真ん中の点です。この立方体を，3点E，P，Qを通る平面で切りました。このとき，頂点Aをふくむ方の立体の展開図は，図2のような正方形になりました。これについて，次の問いに答えなさい。

図1

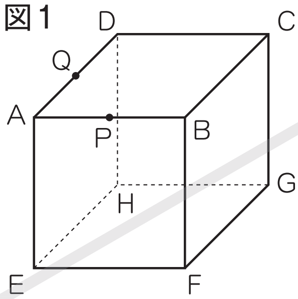
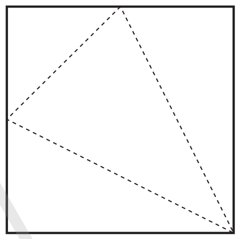


図2



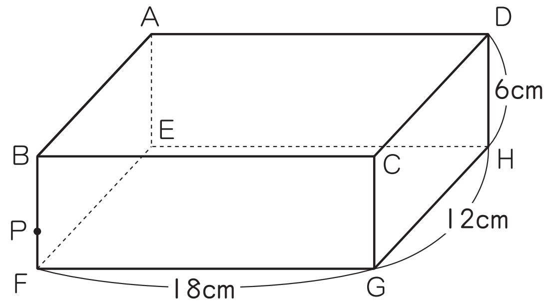
□(1) 頂点Aをふくむ方の立体の体積は何cm³ですか。

cm³

□(2) 切り口の面積は何cm²ですか。

cm²

3 右の図のような直方体があります。点Pは辺BF上の点で，BP：PF＝2：1です。この直方体を，3点A，H，Pを通る平面で2つに切り分けました。これについて，次の問いに答えなさい。



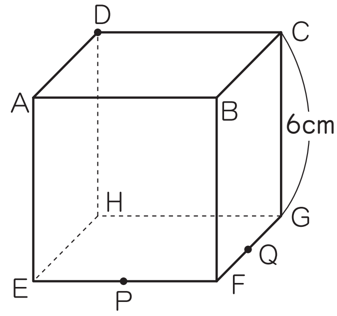
□(1) 頂点Eをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

cm³

□(2) 切り分けた2つの立体の表面積の差は何cm²ですか。

cm²

4 右の図は，１辺の長さが6cmの立方体で，点P，Qはそれぞれ，辺EF，FGの真ん中の点です。この立方体を3点D，P，Qを通る平面で2つに切り分けました。これについて，次の問いに答えなさい。



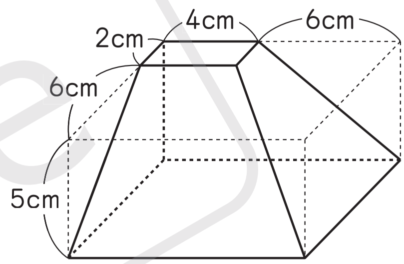
□(1)　PQと辺EHを延長した直線の交点をRとするとき，ERの長さは何cmですか。

cm

□(2)　頂点Hをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

cm³

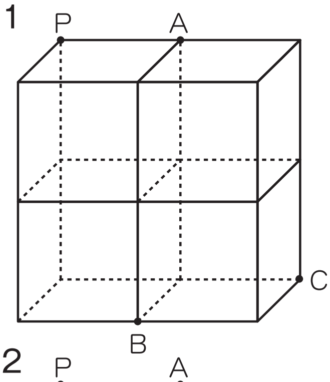
□**5** 右の図のように，縦8cm，横10cm，高さ5cmの直方体の一部を切り落としてできた立体があります。この立体の体積は何cm³ですか。



cm³

6 １辺の長さが6cmの立方体4個でできた**図1**のような直方体があります。これについて，次の問いに答えなさい。

図1

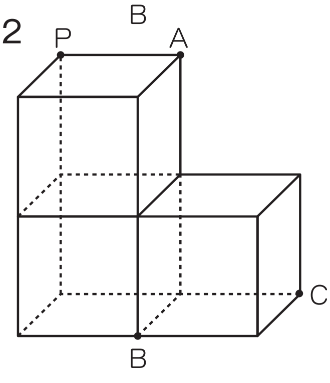


□(1)　この立体を，**図1**の3点A，B，Cを通る平面で2つの部分に切り分けたとき，点Pをふくむ部分の体積は何cm³ですか。

cm³

(2)　**図1**の直方体から立方体を１個取り除き，**図2**のような立体を作りました。この立体を，**図2**の3点A，B，Cを通る平面で2つの部分に切り分けました。

図2



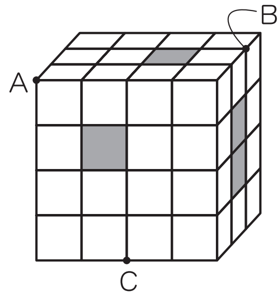
□①　点Pをふくむ部分の体積は何cm³ですか。

cm³

□②　切断してできた切り口の面積は何cm²ですか。

cm²

7 1辺が1cmの立方体をすき間なくはり合わせて，右の図のような直方体を作りました。これについて，次の問いに答えなさい。



□(1) A，B，Cを通る平面で切ったとき，切断される立方体は何個ですか。

個

□(2) 図の影(かげ)をつけた部分の立方体を反対側の面までくりぬいてからA，B，Cを通る平面で切ったとき，切断される立方体は何個ですか。

個

□**8** 1辺が3cmの白色の立方体を積み重ねて，1辺が9cmの立方体を作り，**図1**のように1辺が3cmの正方形の穴(あな)を3方向から向かい合う面まで垂直にくりぬき，くりぬいた部分に黒色のねんどをすき間なくつめこみました。

この立体を3点A，B，Cを通る平面で切ったとき，切り口の図形は，**図2**の正三角形ABCとなります。

図2の正三角形ABCに，黒色のねんどとなる部分を黒くぬりなさい。

図1

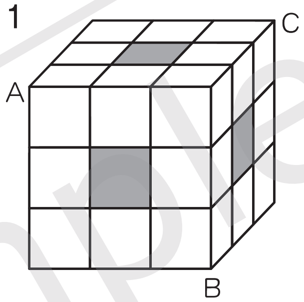
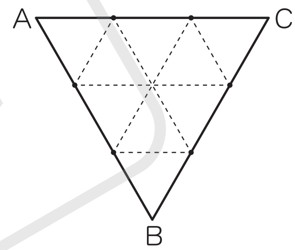
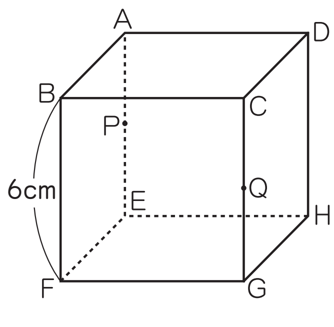


図2



9 右の図のような1辺の長さが6cmの立方体があり，点P，Qはそれぞれの辺の真ん中の点です。これについて，次の問いに答えなさい。



□(1) BGとFQの交点をRとするとき，三角形RGQと三角形BGCの面積の比を求めなさい。

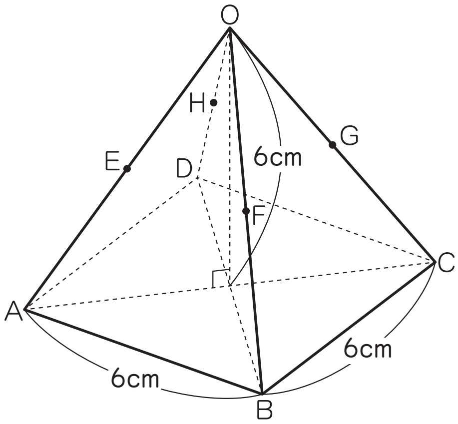
：

□(2) この立体を，3点B，D，Gを通る平面と，3点F，P，Qを通る平面で切り，4つの部分に分けました。このとき切り分けた4つの部分のうち，最も体積が小さい部分の体積は何cm^3ですか。

cm^3

チャレンジ

1　右の図は，底面が1辺6cmの正方形，高さが6cmで，OA，OB，OC，ODの長さがすべて等しい四角すいです。また，E，F，G，Hはそれぞれの辺の真ん中の点です。これについて，次の問いに答えなさい。



□(1)　この四角すいを4点E，F，G，Hを通る平面で切断したとき，点Aをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

cm³

□(2)　この四角すいを4点A，B，G，Hを通る平面で切断したとき，点Cをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

cm³

(3)　この四角すいを3点A，F，Hを通る平面で切断したとき，切断面と辺OCが交わる点をPとします。

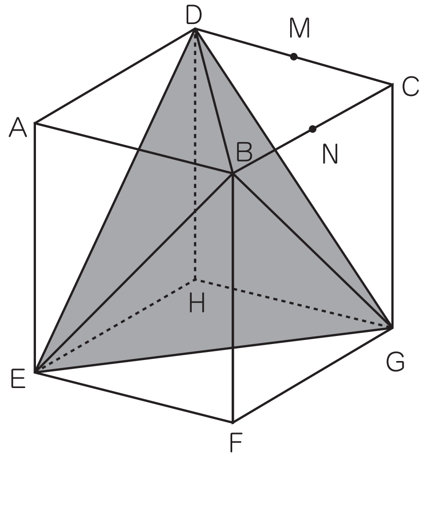
□①　OP：PCを求めなさい。

：

□②　点Cをふくむ立体の体積は何cm³ですか。

cm³

2　右の図は，1辺の長さが6cmの立方体ABCD－EFGHで，点M，Nはそれぞれ CD，BCの真ん中の点です。この中に4点B，D，E，Gを頂点とする立体Sをつくりました。これについて，次の問いに答えなさい。



□(1)　立体Sの体積は何cm³ですか。

cm³

□(2)　この立方体を3点M，N，Fを通る平面で切断して2つの部分にわけたとき，小さい方の立体をTとします。立体Sと立体Tの共通部分の体積は何cm³ですか。

cm³